PROBABILITAT

Josep Pla i Carrera

Primera aproximació a la probabilitat

Considerem un fenomen que té un nombre finit de resultats possibles $S = \{a_1, \dots, a_n\}$. El conjunt S s'anomena *espai mostral*.

Suposem que cada resultat possible a_i té associat un nombre real p_i tal que

$$0 \le p_i \le 1$$
$$p_1 + p_2 + \cdots + p_{n-1} + p_n = 1$$

El conjunt de valors p_i és una *valoració probabilística* de l'espai mostral.

Un *succés* A està format per un cert nombre r de resultats possibles de l'espai mostral S:

$$A = \{a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_r}\}.$$

Direm que la *probabilitat* $P(A)$ *del succés* A és el valor

$$P(A) = p_{i_1} + \cdots + p_{i_r}.$$

Un fenomen és *equiprobable* quan $p_i = \frac{1}{n}, i = 1, \dots, n$. Aleshores

$$P(A) = \frac{r}{n} = \frac{\text{casos favorables a } A}{\text{casos possibles}}.$$

PR1. Proveu que

(a) $0 \le P(A) \le 1$, per a tot succés A.

(b) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, si $A \cap B = \emptyset$.

(c) $P(S) = 1$.

(b$'$) En general, $P(A_1 \cup \cdots \cup A_m) = P(A_1) + \cdots + P(A_m)$, si $A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j$.

(d) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

(d$'$) Generalitzeu (d) a tres, quatre, etc m successos.

(e) $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$, on $\overline{A}$ indica l'esdeveniment contrari de A.

(f) Si $A \subseteq B$, aleshores $P(A) \leq P(B)$ i $P(A - B) = P(A) - P(B)$.

PR2. Aquest problema suggereix la definició general de probabilitat P en un espai mostral S. És una aplicació dels subconjunts de S en $\mathbb{R}$ que compleixi les tres propietats:

(a) Per a cada $A \subseteq S$, $0 \leq P(A) \leq 1$, per a tot succés A.

(b) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, si $A \cap B = \emptyset$.

(c) $P(S) = 1$.

Podeu veure que aleshores es compleixen les propietats (b$'$), (d), (d$'$), (e) i (f) del problema anterior.

Aquesta definició permet de generalitzar el cas *discret* al cas general en el qual S pot ser un conjunt infinit numerable o no numerable. L'únic que cal tenir en compte és que la probabilitat P ha d'estar definida en una família $\mathcal{A}$ de subconjunts d'S tancada per unió i per pas al complementari. Cal, a més, que $S \in \mathcal{A}$.

Un exemple concret ens el proporcionen els subconjunts d'un conjunt geomètric S que sigui una superfície o un sòlid. Aleshores, si $A \subseteq S$,

$$P(A) = \frac{\text{àrea d'}(A)}{\text{àrea d'}(S)} \qquad \text{o} \qquad P(A) = \frac{\text{volum d'}(A)}{\text{volum d'}(S)}.$$

Probabilitat condicionada i independència

Considerem el següent exemple: d'un lot de 100 productes amb 80 sense defectes i 20 amb defectes n'agafem dos i ho fem (a) amb substitució, (b) sense substitució.

Considerem ara els següents successos

$$A = \{\text{el primer article és defectuós}\}$$
$$B = \{\text{el segon article és defectuós}\}$$

En el primer cas $P(A) = P(B) = \frac{20}{100} = \frac{1}{5}$. En el segon cas, $P(A) = \frac{20}{100} = \frac{1}{5}$. Però quin és ara el valor de $P(B)$? És clar que ara, en el cas (b), el valor que pren $P(B)$ depèn del que hagi passat amb el succés A, ja que el comportament de la mostra varia segons que s'hagi esdevingut A o no. Aleshores indicarem $P(B|A)$ la probabilitat del succés B en el ben entès que el succés A ha succeït prèviament.

En l'exemple que estem comentant és clar que $P(B|A) = \frac{19}{99}$. (En realitat l'espai mostral ha canviat i els successos estan condicionats a A.)

Formalment definim la *probabilitat condicional* per l'expressió

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$

Exemple. Llancem dos daus i anotem els resultats $\langle x_1, x_2 \rangle$, on x_i designa el resultat de l'i-èsim dau ($i = 1, 2$). Considerem els successos

$$A = \{\langle x_1, x_2 \rangle : x_1 + x_2 = 10\} \quad \text{i} \quad B = \{\langle x_1, x_2 \rangle : x_1 < x_2\}.$$

Ara podem considerar el succés

$$A \cap B = \{\langle x_1, x_2 \rangle : x_1 + x_2 = 10, x_1 < x_2\} = \{\langle 4, 6 \rangle\}.$$

D'on

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{36}}{\frac{3}{36}} = \frac{1}{3}.$$

De forma anàloga podíem haver calculat primer la probabilitat de $P(B|A)$ i d'ella haver-ne deduït la probabilitat de $P(A \cap B)$.

En definitiva, doncs,

$$P(A \cap B) = P(B|A) \cdot P(A)$$
$$P(B \cap A) = P(A|B) \cdot P(B)$$

Llei de les probabilitats totals

Sigui A un succés i $B_1, B_2, \ldots, B_{k-1}, B_k$ una partició de l'espai mostral S, és a dir, una família finita de successos tal que

$$B_i \cap B_j = \emptyset, \text{ si } i \neq j, \quad \text{i} \quad S = B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_{k-1} \cup B_k.$$

Aleshores

$$P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + \cdots + P(A \cap B_{k-1}) + P(A \cap B_k) =$$
$$= P(A|B_1) \cdot P(B_1) + P(A|B_2) \cdot P(B_2) + \cdots + P(A|B_k) \cdot P(B_k)$$

Fórmula de Bayes

Si, com abans, A és un succés i $B_1, B_2, \ldots, B_{k-1}, B_k$ una partició de l'espai mostral S, aleshores

$$P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i) \cdot PB_i}{P(A|B_1) \cdot P(B_1) + \cdots + P(A|B_k) \cdot P(B_k)}, \; i = 1, 2, \ldots, k-1, k.$$

Aquesta fórmula rep el nom de fórmula per a calcular la probabilitat de les *causes*, ja que com que s'ha de donar una i només una de les causes B_i, ens permet de conèixer la probabilitat d'aquesta causa en el supòsit que s'hagi donat el succés A.

Successos independents

Dos successos A i B són *independents* si, i només si, cap d'ells no condiciona la probabilitat de l'altre; és a dir, si, i només si,

$$P(A|B) = P(A).$$

Dit d'una forma alternativa, si, i només si,

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

En general, n successos $A_1, \ldots, A_n$ són *mútuament independents* si, i només si, per a tot $k = 2, \ldots, n$, tenim que

$$P(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdots P(A_{i_k}).$$

Variables aleatòries

Quan fem un experiment, moltes vegades estem més interessats en algun valor (que serà un nombre real) associat al resultat de l'experiment, que eu el resultat mateix. Per exemple, si juguem a cara i creu amb un altre jugador, de manera que si tirem i surt cara rebem 5 pta i si surt creu li donem al contrari 3 pta, els dos nombres 5 i 3 ens interessen molt més a cada jugada que el fet mateix de sortir cara o creu. Això ens porta a la definició de les funcions que prenen valors sobre el conjunt d'esdeveniments elementals d'un experiment. Per dir-ho d'alguna manera, parlem de les *apostes* del joc.

Suposem que tenim un espai mostral $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ i unes probabilitats associades p_i tal com s'ha explicat abans. Una *variable aleatòria* és una funció de l'espai mostral S en $\mathbb{R}$ que associa a cada esdeveniment elemental un nombre real.

$$X : S \to \mathbb{R}.$$

Per exemple, sigui $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ i definim X així

$$X(1) = X(2) = X(3) = 1, \quad X(4) = X(5) = X(6) = -1.$$

Podem interpretar la variable X com el *guany* d'un jugador que rep 1 pta si surt 1, 2 o 3 al dau o en lliura 1 al contrari si surt 4, 5 o 6 al dau.

Un altre exemple. Tirem una moneda dues vegades i l'espai mostral és

$$S = \{CC, C+, +C, ++\}$$

on C indica cara i $+$ indica creu. Una variable aleatòria sobre aquest espai mostral podria ser el *nombre de cares* obtingudes. Tindríem $X(CC) = 2$, $X(C+) = 1$, $X(+C) = 1$, $X(++) = 0$. Sobre el mateix espai mostral podríem definir altres variables aleatòries, com per exemple, el *nombre de cares menys el nombre de creus* i tindríem $Y(CC) = 2$, $Y(C+) = 0$, $Y(+C) = 0$, $Y(++) = -2$.

Esperança matemàtica

Si tenim una variable aleatòria que pren valors reals $x_2, x_2, \ldots, x_n$ sobre l'espai mostral $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ i unes probabilitats associades $p_1, p_2, \ldots, p_n$, es defineix com a *esperança matemàtica* o també *mitjana* al valor

$$E(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \cdots + x_n p_n.$$

Per exemple, si ens demanen l'esperança matemàtica de la variable aleatòria *valor obtingut en tirar un dau no trucat*, hem d'entendre: (a) que l'espai mostral és el de possibles jugades del dau, és a dir $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$; (b) que totes les ocurrències tenen la mateixa probabilitat (el dau és no trucat), i per tant $p_1 = \cdots = p_6 = 1/6$; (c) la variable aleatòria X pren els valors reals 1, 2, 3, 4, 5, 6 segon els puuts que surten al dau. L'esperança és

$$1\frac{1}{6} + 2\frac{1}{6} + 3\frac{1}{6} + 4\frac{1}{6} + 5\frac{1}{6} + 6\frac{1}{6} = \frac{1}{6}\,\frac{6 \times 7}{2} = \frac{7}{2}.$$

Observeu a l'exemple que l'esperança matemàtica o mitjana o *valor esperat* de la variable aleatòria X pot ser un valor real que X pot no prendre mai. La *llei dels grans nombres* ens diu que l'esperança matemàtica d'una variable aleatòria és el valor al qual s'aproxima la mitjana dels valors observats si repetim l'experiment moltes vegades i amb independència.

Problemes

PR3. *El problema de Fermat-Pascal.* Dos jugadors A i B juguen una partida cada una de les quals té una probabilitat de $\frac{1}{2}$ de ser guanyada i de $\frac{1}{2}$ de ser perduda. Suposem que el resultat d'una partida no depèn pas dels resultats de les partides anteriors. [Pensem, per exemple, en una sèrie de "cares i creus".] Cada jugador guanya un punt quan guanya i no-res quan perd. Convenen en jugar-se 100 pta. cada un i que el pot de 200 pta. se l'endurà el primer que guanyi 4 partides.

Per la raó que sigui han de plegar quan A necessita dues partides per tal d'haver-ne guanyat 4 i B en necessita 3. Com cal repartir el pot?

Feu el càlcul

(a) suposant que els successos són les situacions reals a partir d'aquell moment, si el joc hagués continuat (solució de Pascal);

(b) si volem que tots el casos que es considerin siguin equiprobables (solució de Fermat).

PR4. *La paradoxa de Bertrand.* Tirem una corda a l'atzar en un cercle. Quina és la probabilitat que sigui més gran que no pas el costat del triangle equilàter inscrit? Distingiu tres mètodes de càlcul:

(a) la distància al centre;

(b) la situació del punt mig de la corda;

(c) l'angle central que determina la corda.

Quina és la paradoxa?

PR5. *El problema de l'aniversari.* Quina és la probabilitat que en un grup d'n persones n'hi hagi dues almenys que hagin nascut el mateix dia?

PR6. *El problema dels llumins de Banach.* Tenim dues capses de llumins i en posem una a cada butxaca dels pantalons. Cada capsa té n llumins. Quan en necessitem un, triem a l'atzar una butxaca, traiem la capsa de llumins, n'agafem un, i tornem la capsa a la butxaca. Una de les vegades que traiem una capsa, observem que és buida. Quina és la probabilitat que quedin k llumins a l'altra capsa?

PR7. *La ruïna del jugador.* Dos jugadors M i N disposen de m i n pta cada un respectivament. Juguen amb una moneda no trucada. Si surt cara, M dóna una pesseta a N i si surt creu ho fan al revés. El joc continua fins que un dels dos jugadors s'arruïna. Calculeu les probabilitats de guany de cada jugador i la durada mitjana de la partida.

PR8. *El problema de les torres.* Col·loquem 8 torres en un tauler d'escacs. Quina és la probabilitat que cap d'elles pugui matar-ne una altra?

PR9. *El problema dels nombres primers entre si.* Quina és la probabilitat que, en agafar dos nombres naturals a l'atzar, siguin primers entre ells?

PR10. *El problema dels daus trucats.* Demostreu que és impossible de trucar una parella de daus de manera que les sumes de les puntuacions (tirant-los a la vegada) tinguin totes la mateixa probabilitat.

PR11. Triem un enter a l'atzar entre 1.000.000 i 10.000.000 (inclosos). Quina és la probabilitat que no tingui dues xifres iguals? I que no tingui dues xifres iguals en posicions consecutives?

PR12. Tirem una moneda, després tirem un dau, i finalment traiem una carta d'un joc de 52 cartes i considerem els successos

$$A = \text{surt cara;}$$
$$B = \text{surt un 5 o un 6;}$$
$$C = \text{surt una carta de piques.}$$

Quin és l'espai mostral S associat a aquesta experiència? Quines són, en relació amb aquest espai mostral, els successos $A, B, C, A \cap B, B \cap C, C \cap A, A \cap B \cap C$? Quines son les probabilitats que els corresponen? Són independents dos a dos? i tots tres?

PR13. Tirem cinc monedes independents. Quina és la probabilitat d'obtenir $c\,c + c\, +$? Quina és la probabilitat que surtin tres cares exactament? Quina és la probabilitat que no surtin tres cares?

Nota: La qüestió és força més complicada si els llançaments no són independents. Intenteu de donar-hi una resposta.

PR14. Barregem les cartes d'una baralla de 52 cartes. Quina és la probabilitat que els 4 asos quedin junts?

PR15. Llancem 6 daus indistingibles. Quants resultats diferents podem observar? I si els daus són distingibles?

PR16. Tenim 4 cartes conegudes i les posem de cap per avall damunt la taula i a l'atzar els hi atribuïm un valor. Quina és la probabilitat d'endevinar-ne una, dues, tres o quatre?

PR17. En una porta hi ha dos panys i les claus són en una capsa en la qual hi ha sis claus. Si en traiem dues a l'atzar, i en col·loquem una a cada pany, quina és la probabilitat que obrin la porta? Quina és la probabilitat que el parell de claus serveixi per a obrir la porta?

PR18. En una festa hi ha 6 dones i 4 homes i sabem que hi ha dos matrimonis. Triem dues parelles home-dona a l'atzar. Quina és la probabilitat d'endevinar els dos matrimonis? I si sabem que hi ha tres matrimonis, quina és la probabilitat d'endevinar-los?

PR19. Un autobús fa 4 parades dins l'aeroport per tal de distribuir 15 passatgers. Quina és la probabilitat que tots baixin a la mateixa parada? Quina és la probabilitat que almenys una persona baixi a cada una de les parades?

PR20. En un bombo hi ha 366 boles etiquetades amb els dies d'un any de traspàs. Si n'extraiem 180, quina és la probabilitat que corresponguin a dies distribuïts uniformement sobre els 12 mesos? Quina és la probabilitat que entre les 30 primeres boles extretes no n'hi hagi cap del mes d'Agost o del mes de Setembre?

PR21. Un dau perfecte es llença dues vegades. El total de punts obtinguts 7. Quina és la probabilitat que el primer punt hagi estat k, amb $0 \leq k \leq 6$?

PR22. Un pare, una mare i un fill decideixen fer un joc familiar. En cada partida només juguen dues persones. Les partides es poden guanyar o perdre amb la mateixa probabilitat. No es poden empatar. El jugador que guanya una partida juga la següent amb el jugador que està descansant. El joc segueix fins que un dels jugadors guanya exactament dues partides (no necessàriament consecutives). S'acorda, per qüestions d'edat, que el pare pot decidir si intervé o no en la primera partida del joc, o bé si s'espera a que la mare i el fill hagin jugat la primera partida. Quina de les dues decisions li és més avantatjosa?

PR23. Hem de pintar els pisos d'una casa de vuit pisos amb dos colors: el blau i el vermell. Quina és la probabilitat que no hi hagi dos pisos consecutius de color vermell, si la tria dels colors es fa a l'atzar?

PR24. Hem de col·locar tres persones A, B, C en ordre de manera aleatòria. Se'ns acudeixen tres maneres de fer-ho.

(a) En tres papers escrivim els números 1, 2, i 3. Aleshores fem que, per ordre alfabètic, triïn un dels papers. L'ordre el dóna l'ordre del nombre triat.

(b) Escrivim en paperetes totes les permutacions possibles de les lletres A, B, C. Les posem en una capsa i en traiem una a l'atzar. L'ordre ve donat per la l'ordre de la permutació triada.

(c) Procedim com en el cas (a), però ara la tria del paper que porta escrit el nombre es fa, després d'haver triat a l'atzar una permutació de les lletres A, B, C, com en (b). L'ordre final és el dels nombres triats per cada una de les persones.

Quin d'aquests tres mètodes és més equitatiu?

PR25. En Joan tira 6 monedes perfectes i la Maria en tira 5. Quina és la probabilitat que en Joan tregui més cares que no pas la Maria?

PR26. El màgic de cartes Sherwin Betlotz es juga nna important quantitat de diners afirmant que no ets capaç de treure 3 cartes d'un joc de 52 cartes sense treure almenys una de les dotze figures. Voldries jugar amb ell una partida apostant la mateixa quantitat de diners?

PR27. Triem tres punts a l'atzar damunt d'una circumferència. Determineu la probabilitat que el triangle format pels tres punts contingui el centre de la circumferència.

PR28. Un club de tennis convida 32 jugadors d'igual habilitat i qualitat. Han de jugar per parelles i el que perd ja no torna a jugar. Quina és la probabilitat que una parella determinada competeixi?

PR29. Vols jugar aquest joc amb mi? Per poder-lo jugar has de pagar 1 €. El joc consisteix en el següent: Remenem ben remenat un joc de cartes. En treus dues. Si són negres, te les quedes. Si són vermelles, me les quedo jo. Si són de colors diferents, les deixem de banda. El joc s'acaba quan s'exhaureixen les cartes. Jo et pagaré 3 € per cada carta que tu tinguis de més que jo.

PR30. Llanço un dau perfecte n vegades. Quina és la probabilitat de treure un nombre senar de sisos?

PR31. Si n^2 monedes es col·loquen a l'atzar en n files de n monedes cada una. D'aquestes monedes n'hi ha n de plata. Quina és la probabilitat que, en almenys una fila, no hi hagi cap moneda de plata?

PR32. Una capsa conté p boles blanques i q boles negres. Al costat de la capsa hi ha una pila suficientment gran de boles negres. S'agafen dues boles a l'atzar de la capsa. Si són del mateix color, a la capsa hi posem una bola negra de la pila. Altrament, hi posem la bola blanca que hem tret. Repetim el procés fins que traiem les dues darreres boles de la capsa i hi col·loquem la darrera bola. Quina és la probabilitat que aquesta darrera bola que queda dins la capsa sigui blanca?

PR33. Llancem una moneda perfecta repetidament fins aconseguir un nombre senar de cares seguides d'una creu. Doueu el nombre esperat de llançaments que cal fer.

PR34. Al voltant d'un llac hi ha n cases. Les pintem usant k colors que anem triant a l'atzar. Quina és la probabilitat que, un cop totes estiguin pintades, no hi hagi dues cases pintades del mateix color?

PR35. Un vell de 75 anys té el 43% de probabilitat de viure 10 anys més. Un de 80, només té el 27% de viure 10 anys més. Un vell de 75 anys té un 20% de probabilitat de viure fins els 90 anys. Quina és la probabilitat que un vell de 80 anys mori en el decurs dels cinc anys següents?

PR36. En una urna hi col·loquem 4 fitxes negres i 5 de blanques. En traiem tres a l'atzar, però una després de l'altre. La segona és negre. Quina és la probabilitat que la tercera també ho sigui?

PR37. Tenim dues baralles de cartes espanyoles. A una d'elles li falta una carta i no sabem quina és. Elegim una baralla a l'atzar i traiem una carta. Quina és la probabilitat que la carta sigui d'oros?

PR38. Tenim dues urnes U_1 i U_2. La primera conté 2 boles blanques i 3 boles negres. La segona conté 2 boles blanques i 3 de vermelles. Traiem una bola de la urna U_1 i la posem en la urna U_2. Després traiem una bola de la urna U_2 i la posem en la urna U_1. Finalment traiem dues boles de la urna U_1 i resulta que una és blanca i l'altra és negra. Quina és la probabilitat que després de fer aquesta darrera extracció la urna U_1 no tingui cap bola vermella?

PR39. En una cel·la d'una presó hi ha tres presoners A, B i C. Un d'ells ha de ser condemnat. La probabilitat de ser condemnat és la mateixa per a cada un d'ells: $1/3$. El presoner A sap que un dels presos B, C no serà condemnat. Tanmateix ho pregunta al guardià. Calculeu la probabilitat que A sigui el condemnat si el guardià li respon: "B no serà condemnat", en el casos següeuts:

(a) Que A hagi preguntat: "B serà condemnat?"

(b) Que A hagi preguntat: "Quin dels dos B o C no serà condemnat?"

Suposem que el guardià ho sap i que diu la veritat.

Es complica molt el problema si suposem que el guardià ho sap però diu la veritat o menteix després de tirar una moneda a l'aire, segons li surti cara o creu?

PR40. Quan surt cara obtinc 1 €, i quan surt creu n'obtinc 2. La moneda que llanço és perfecta. Guanyo el joc quan obtinc exactament 100 €. La probabilitat de guanyar és més gran, més petita, o igual a $2/3$?

PR41. Un jurat està format per 9 persones que han de donar un veredicte. Cada una d'elles l'emet independentment de les altres amb probabilitat $1/2$ per innocent i $1/2$ per culpable. Quina és la probabilitat que, en acabar la votació, un membre concret del jurat estigui en la majoria. (Quan n és parell, $n = 2k$, està en la majoria si està en el grup format per almenys $k + 1$ vots.)

PR42. Quina és la probabilitat que en tirar tres vegades un dau, el producte de les puntuacions obtingudes sigui un múltiple de 6?

PR43. Amb les xifres 1, 1, 2, 2, 4, 5 formem tots els nombres possibles de sis xifres. Trobeu la probabilitat que, en elegir-ne un a l'atzar, sigui múltiple de 12.

PR44. En una capsa hi ha cartonets, cada un dels quals conté una lletra. En total hi ha 8 cartonets amb la lletra A, 5 amb la lletra C i 4 amb la lletra S. Un cec treu 4 cartonets i, posant-los en fila, vol construir la paraula $CASA$. Calculeu la probabilitat que té d'aconseguir-ho.

Nota: El problema està resolt, si cada lletra està al seu lloc, encara que no estigui col·locada de forma correcta: pot estar de cap per avall, o girada a la dreta o a l'esquerra, o ben posada.

PR45. En el joc de les travesses, quantes n'hi ha amb 10 encerts? Quina és la travessa més probable? Quantes n'hi ha sense cap resultat encertat? (Suposem que la travessa conté 14 partits i que cada partit accepta tres valors $1, 2, X$, segons que hagi guanyat el que juga a casa, el que juga fora de casa, o hi hagi hagut empat.)

PR46. Els carrers d'una ciutat formen una quadrícula de carrers verticals i horitzontals. Els carrers horitzontals estan enumerats amb els números 1, 2, 3. Els carrers verticals, en canvi, amb les lletres a, b, c, d, e i f, amb aquest ordre d'esquerra a dreta. Un vianant surt del punt $\langle 1, a\rangle$. Tira un dau perfecte. Si li surt un múltiple de tres fa una travessia horitzontal cap a la dreta. Si no, fa una travessia vertical cap amunt. Això ho fa en cada una de les cruïlles que va trobant en el seu passeig. Quina és la probabilitat que passi per la cruïlla $\langle 3, d\rangle$?

PR47. En un sorteig els tiquets estan numerats $00000, 00001, 00002, \ldots, 99998, 99999$.

Quina és la probabilitat que el número que surti només tingui tres xifres diferents?

PR48. Un matrimoni té 5 fills. Calculeu la probabilitat que, entre ells, hi ha almenys dos nois i almenys una noia. La probabilitat de néixer noi o noia és igual a una meitat.

PR49. En Joan va a buscar en Pere que ve en el tren de les 11. Si troba un taxi, arribarà a l'estació a les 11. Si no el troba, hi arribarà a les 11h 15m. La probabilitat de trobar un taxi és de $3/5$, i la probabilitat que el tren es retardi un quart d'hora o més és de $2/9$. Quina és la probabilitat que arribi a l'estació a temps?

PR50. Una capsa conté 9 cartonets marcats de l'1 al 9, ambdós inclosos. Traiem, un a un, tres cartonets. Trobeu la probabilitat que siguin alternativament parell, senar, parell, o bé senar, parell, senar.

PR51. En una urna hi ha b boles blanques i $b+n$ boles negres. Calculeu els valors possibles de b i n per tal que la probabilitat d'obtenir una bola blanca sigui $1/n$.

PR52. D'un joc de 40 cartes n'agafem 5 a l'atzar. Calculeu la probabilitat que tres siguin asos i les altres dues siguin iguals (dos reis, dos quatres, etc.).

PR53. El 50% de cotxes que hi ha en una ciutat són de la marca Seat. Calculeu la probabilitat que, d'entre 10 cotxes aparcats en una plaça, quatre, almenys, siguin d'aquesta marca.

PR54. En el pis cinquè d'una cas de set pisos, em trobo esperant l'ascensor, que inicia l'ascens amb dues persones. Sabent que, en cada pis, hi viuen 10 persones i que jo no sóc pas de la casa, quina és la probabilitat que l'ascensor es pari al cinquè pis?

PR55. Tres ruletes perfectament horitzontals, centrades i equilibrades, contenen sectors circulars, pintats de negre i vermell de la forma següent. La ruleta 1, 180° vermell i 180° negre. La ruleta 2, 225° vermell i 135° negre, i la ruleta 3, 270° vermell i 90° negre. Calculeu la probabilitat que, en jugar simultàniament en les tres ruletes, en dues la bola caigui en el negre i en una en el vermell.

PR56. Elegim a l'atzar dos nombres reals entre 0 i 1. Quina és la probabilitat que un d'ells sigui més petit que el quadrat de l'altre?

PR57. Es consideren tots els nombres naturals d'1 a 10^n, ambdós inclosos. N'agafem un a l'atzar. Quina és la probabilitat, en funció de n, que sigui múltiple de 2 o de 3?

PR58. Tenim tres bosses que contenen n boles numerades $1, 2, 3, \ldots, n$. En traiem una a l'atzar de cada bossa. Suposem que els números de les boles tretes són x, y, z. Quina és la probabilitat qne $z = x + y$. (Les bosses són indistingibles.)

PR59. *El joc de la ruleta.* Una ruleta conté els números del 0 al 36, ambdós inclosos. El 0 té el fons gris, la meitat dels 36 nombres tenen el fons vermell i l'altre meitat tenen el fons negre. Les juguesques més corrents són:

(a) Apostar 1 € a un color (vermell o negre). El guany és de 2 €.

(b) Apostar 1 € a un únic número, exclòs el 0. El guany és de 36 €.

(c) Apostar 1 € a una dotzena arbitrària de nombres, exclòs el 0. El guany és de 12 €.

Si surt el 0 la casa guanya i tots els altres jugadors perden.

Sigui X la variable aleatòria que mesura el guany quan juguem amb el mètode (a). Quina és l'esperança de X?

Siguin Y, Z, respectivament, les variables aleatòries que mesuren el guany quan juguem amb el mètode (b) o (c). Qnina és l'esperança de Y, i la de Z?

PR60. *Un joc de cara i creu.* En un joc de cara i creu hi ha una probabilitat p que surti cara (C) i una probabilitat q que surti creu $(+)$, on $0 \leq p \leq 1$ i $q = 1 - p$. Tirem una moneda fins aconseguir que surti el mateix resultat que en la primera tirada. Aleshores el joc s'acaba. Si el primer resultat és C el jugador guanya un € per cada $+$ que surt fins a la propera cara. Si el primer resultat és $+$ s'intercanvien el papers de C i $+$. Quan hauria d'apostar el jngador per poder jugar a aquest joc de forma que fos equitatiu?

PR61. Un jugador jnga a la ruleta d'acord amb el sistema següent. Juga una sèrie de tres tirades. En la primera i la segona aposta un euro al vermell. En la tercera jugada procedeix de la forma següent:

(a) Si va guanyar en la primera i en la segona, no fa cap juguesca.

(b) Si va guanyar en la primera o en la segona i va perdre en l'altra, es juga un euro al color contrari al que ha sortit la segona vegada.

(c) Si va perdre ambdues vegades, es juga tres euros al vermell.

Siguin X, Y, Z els resultats en euros de la primera, la segona, la tercera tirades respectivament. Calculeu les seves esperances, així com l'esperança de la variable aleatòria $X+Y+Z$.

PR62. *El problema de Sant Petersburg.* Un jugador llança una moneda i guanya un € a la primera tirada si surt cara, un altre si surt cara una altra vegada. Si torna a sortir cara en guanya dos més. Si obté una successió de n cares guanya 2^{n-1} €. Quant ha de pagar per poder jugar aquest joc de forma equitativa?

PR63. Les temperatures de Barcelona i Madrid són de $x°$ i $y°$, respectivament. No les suposem pas independents aquestes dues temperatures. Sabem

(a) $P(x° = 30°)$, la probabilitat que la temperatura de Barcelona sigui de 30°,

(b) $P(y° = 30°)$, la probabilitat que la temperatura de Madrid sigui de 30°, i

(c) $P\Big(\text{màx}(x°, y°) = 30°\Big)$.

Determineu la probabilitat $P\Big(\text{mín}(x°, y°) = 30°\Big)$.

PR64. Un jurat format per tres membres en té dos que indepeudentment tenen la probabilitat p de donar un veredicte correcte i un de indecís que per decidir el veredicte tira una moneda a l'aire en cada decisió. Un jurat amb un únic membre té una probabilitat p de fer un veredicte correcte. Quin d'aquests dos jurats és més just?

PR65. Un calaix conté mitjons vermells i mitjons negres. La probabilitat que. en treure a l'atzar dos mitjons, siguin vermells és $1/2$. (a) Quin és el valor mínim de mitjons que hi ha d'haver al calaix? (b) Quin és el valor mínim si sabem que de mitjons negres n'hi ha un nombre parell?

PR66. Si tirem quatre daus eulaire, quina és la probabilitat que després de tirar poguem triar dos daus de manera que la suma dels punts que marquen aquests dos daus sigui 7? I si en tirem n en comptes de 4?

PR67. Calculeu la probabilitat que en agafar un nombre natural a l'atzar, aquest no sigui divisible ni per 3, ni per 4, ni per 6, però en canvi ho sigui per 2 o per 5.

Mostra de solucions

Solució del problema PR3

(a) Suposem que seguim jugant realment. Tenim els següents casos i probabilitats

Favorables a A:		*Favorables a B:*	
AA	1/4	$ABBB$	1/16
ABA	1/8	$BABB$	1/16
$ABBA$	1/16	$BBAB$	1/16
BAA	1/8	BBB	1/8
$BABA$	1/16		
$BBAA$	1/16		

El problema no és equirepartit.

(b) Si el problema és equirepartit i considerem tots els casos possibles, és a dir, totes les quaternes possibles –si el joc seguís, en quatre partides segur que hi ha un guanyador– podem comptar fàcilment els casos favorables a A i els casos favorables a B que són, respectivament, 11 i 5. S'obté el mateix resultat que a (a).

Solució del problema PR15

Si els daus són distingibles, aleshores tenim 6^6 resultats diferents.

Si són indistingibles hi ha $CR_6^6 = 462$ casos, que es poden desglosar:

- tots iguals: $C_6^1 = 6$
- 5 d'iguals: $C_6^1 \cdot C_5^1 = 30$
- 4 d'iguals i $\begin{cases} \text{2 de diferents: } C_6^1 \cdot C_5^2 = 60 \\ \text{2 d'iguals: } C_6^1 \cdot C_5^1 = 30 \end{cases}$

$$\bullet \text{ 3 d'iguals i } \begin{cases} \text{3 de diferents:} \quad C_6^1 \cdot C_5^3 = 60 \\ \text{2 d'iguals i un de diferent:} \quad C_6^1 \cdot C_5^1 \cdot C_4^1 = 120 \\ \text{3 d'iguals:} \quad C_6^2 = 15 \end{cases}$$

$$\bullet \text{ 2 d'iguals i } \begin{cases} \text{4 de diferents:} \quad C_6^1 \cdot C_5^4 = 30 \\ \text{2 d'iguals i 2 de diferents:} \quad C_6^2 \cdot C_4^2 = 90 \\ \text{2 d'iguals i 2 diguals:} \quad C_6^3 = 20 \end{cases}$$

$$\bullet \text{ tots diferents:} \quad C_6^6 = 1$$

Solució del problema PR16

Tenim 4! maneres diferents d'assignar valors. Volem calcular la probabilitat d'encertar exactament una carta que pot se la primera, o la segona, o la tercera o la quarta. Si les cartes *reals* són a, b, c i d i suposem que hem d'encertar la quarta, els valors que podem assignar a les tres primeres són

$$abc, acb, bac, cba, bca, cab.$$

D'aquests casos, els únics que són favorables a encertar només la quarta són els dos darrers. Els mateix valor ens sortiria si calculéssim els casos favorables a encertar exactament la primera, la segona o la tercera. Els casos favorables en total són 8 i la probabilitat serà $8/24 = 1/3$.

Si hem d'encertar exactament dues cartes, el parell de cartes encertades es pot triar de $C_4^2 = 6$ maneres diferents, i si per exemple hem d'encertar la tercera i la quarta, els valors que podem assiguar a la primera i la segona són

$$ab, ba$$

i només aquest últim fa que no s'encerti ni a primera ni la segona. Els casos favorables són 6 i la probabilitat és $6/24 = 1/4$.

Encertar exactament tres cartes és impossible.

Calculeu la probabilitat d'encertar totes les cartes, i la de no encertar-ne cap.

Solució del problema PR67

Posem $I_n = n\mathbb{Z} = \{nz : z \in \mathbb{Z}\}$. Aleshores es demana la probabilitat del succés

$$A = (I_2 \cup I_5) \cap \overline{I_3} \cap \overline{I_4} \cap \overline{I_6},$$

on $\overline{I_n} = \mathbb{Z} - I_n$. Cal recordar que $I_n \cap I_m = \{z \in \mathbb{Z} : z = \dot{n} \text{ i } z = \dot{m}\} = I_r$, on $r = \text{mcm}(m, n)$. Cal recordar també que si M i N són succesos, llavors

$$P(M \cup N) = P(M) + P(N) - P(M \cap N)$$

i, com que $M \cap \overline{N} = M - (M \cap N)$,

$$P(M \cap \overline{N}) = P(M) - P(M \cap N).$$

Ara cal aplicar aquestes fórmules a l'esdeveniment A.